



CONCURSUL NAȚIONAL „PEDAGOGIA MATEMATICII”
7 martie 2026
MEGYEI SZAKASZ / BUKAREST SZEKTORAINAK SZAKASZA
X. OSZTÁLY
TÉTELEK

Vokacionális szakirány, pedagógia profil, minden szak.

- Minden tétel kidolgozása kötelező. 10 pont jár hivatalból.
- Az effektív munkaidő három óra.

I.TÉTEL

(20 pont)

Oldd meg a természetes számok halmazában a következő egyenleteket:

10p a) $\sqrt{\log_{2026}^4 x - 2 \cdot \log_{2026}^2 x + 1} = 0.$

10p b) $\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4.$

II.TÉTEL

(20 pont)

10p a) Számítsd ki az $E(a, b) = \frac{\frac{3}{a^2} - \frac{3}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} : \frac{a + \sqrt{ab} + b}{a - b} + 2\sqrt{ab}$ kifejezés értékét, ha $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ és

$b = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$

b) Igazold, hogy $L \in \mathbb{N}$, ahol

10p
$$L = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \dots + \log_2 2026} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \dots + \log_3 2026} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\log_{2026} 1 + \log_{2026} 2 + \dots + \log_{2026} 2026}$$

III.TÉTEL

(25 pont)

Tekintsük az $f : (-8, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt[3]{x}}$ függvényt.

10p a) Adj példát egy olyan $a > -8$ valós számra, amelyre $f(a) \in \mathbb{Q}$. Igazold, hogy az a valós számnak végtelen sok, olyan értéke van, amelyre $f(a)$ egy racionális szám.

10p b) Oldd meg a valós számok halmazában a $\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} = \frac{x+2}{\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}}$ egyenletet.

c) Számítsd ki az alábbi összeg négyzetét:

5p
$$S = \frac{1}{f(0^3) + f(1^3)} + \frac{1}{f(1^3) + f(2^3)} + \frac{1}{f(2^3) + f(3^3)} + \dots + \frac{1}{f(15^3) + f(16^3)}.$$

IV.TÉTEL

(25 pont)

Adottak az a, b, c, u, v, w valós számok, úgy, hogy teljesül
 $a^2 + b^2 + c^2 = au + bv + cw = u^2 + v^2 + w^2$ egyenlőség.

10p a) Számítsd ki $(a-u)^2 + (b-v)^2 + (c-w)^2$.

15p b) Oldd meg a valós számok halmazában a következő egyenletet: $3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14.$